17/3/2017

Έστω $(X,*)$ μια ημι-ομάδα

ένα στοιχείο $e \in X$ καλείται ουδέτερο στοιχείο (της X ως προς την πράξη $*$) $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in X$ $x*e = e*x$

Παρατήρηση: Αν e ουδέτερο στοιχείο της ημι-ομάδας $(X,*)$, τότε το e είναι μοναδικό. Έστω $e, e' \in X$ είναι δύο ουδέτερα στοιχεία του X

Τότε $\forall x \in X$: $x*e = x = e*x \xrightarrow{\text{αν } x=e'} e'*e = e' = e*e'$

$x*e' = x = e'*x \xrightarrow{\text{αν } x=e} e*e' = e = e'*e$

Τελικά $e = e'$

Ορισμός: Ένα ζεύγος $(X,*)$ καλείται μονοειδές $\Longleftrightarrow$ η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική και υπάρχει ουδέτερο στοιχείο στο X για την πράξη $*$.

Παραδείγματα: (1) $(\mathbb{N},+)$ είναι ημι-ομάδα αλλά όχι μονοειδές. Όμως $(\mathbb{N}_0,+)$ είναι μονοειδές. Επίσης τα ζεύγη $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$ είναι μονοειδή

(2) $(\mathbb{N},\cdot)$, $(\mathbb{Z},\cdot)$, $(\mathbb{Q},\cdot)$, $(\mathbb{R},\cdot)$, $(\mathbb{C},\cdot)$: μονοειδή

(3) $(M_{n\times m}(\mathbb{K}),+)$: μονοειδές όπου $\mathbb{K} = \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

(4) $(M_n(\mathbb{K}),\cdot)$: μονοειδές

(5) $\forall X \neq \emptyset$ $(S(X), \circ)$: μονοειδές

(6) $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $(\mathbb{C}^*,\cdot)$: μονοειδή

Έστω $(X,*)$: μονοειδές με ουδέτερο στοιχείο e

Μπορούμε να λύσουμε στο X εξισώσεις της μορφής $a*x=b$ και $x*a=b$

Παράδειγμα: (1) Στο μονοειδές $(\mathbb{N}_0,+)$ τέτοιες εξισώσεις δε λύνονται πάντα, έτσι για παράδειγμα η εξίσωση $2+x=1$ δεν επιλύεται στο $\mathbb{N}_0$

(2) $(\mathbb{Z},+)$: $3+x=5$

$$-3+(3+x) = -3+5$$
$$\Rightarrow (-3+3)+x = 2$$
$$\Rightarrow 0+x = 2$$
$$\Rightarrow x = 2$$

$(\mathbb{Q}^*,\cdot)$

$$3\cdot x = 5$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3}\cdot(3\cdot x) = \frac{1}{3}\cdot 5$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\cdot 3\right)\cdot x = \frac{5}{3}$$
$$\Rightarrow 1\cdot x = \frac{5}{3}$$
$$\Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

Ορισμός: Έστω $(X,*)$ μονοειδές με ουδέτερο στοιχείο το e. Αν $x \in X$ τότε ένα αντίστροφο στοιχείο για το x (ως προς την πράξη $*$) είναι ένα στοιχείο $x' \in X$:

$$x * x' = e = x' * x$$

Παρατήρηση: Για ένα στοιχείο $x \in X$, το αντίστροφο στοιχείο του x αν υπάρχει τότε είναι μοναδικό.

Έστω ότι x' και x'' είναι αντίστροφα στοιχεία του x

$$x * x' = e = x' * x \quad \Rightarrow x'' * (x * x') = x'' * e$$
$$x * x'' = e = x'' * x \quad \Rightarrow (x'' * x) * x' = x''$$
$$\Rightarrow e * x' = x'' \Rightarrow x' = x''$$

Ορισμός: Ένα ζεύγος: $(G,*)$ καλείται ομάδα $\Leftrightarrow$ το ζεύγος $(G,*)$ είναι μονοειδές και κάθε στοιχείο x του G έχει αντίστροφο

Αναλυτικότερα, αν $*: G \times G \to G$ είναι μια πράξη ορισμένη επί ενός συνόλου G, τότε το ζεύγος $(G,*)$ καλείται ομάδα $\Leftrightarrow$ (1) $x * (y * z) = (x * y) * z \quad \forall x,y,z \in G$ (προσεταιριστική)

(2) $\exists e \in G: \forall x \in G \Rightarrow x * e = x = e * x$ (ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου)

3) $\forall x \in G \; \exists x' \in G : x * x' = e = x' * x$ (ύπαρξη αντιστρόφου)

Ορισμός: Μια ομάδα θα καλείται αβελιανή αν-ν η πράξη $*$ είναι μεταθετική, δηλαδή: $\forall x, y \in G : x * y = y * x$

Πρόταση: Έστω $(G, *)$ μια ομάδα, τότε οι εξισώσεις

$$\left\{ \begin{array}{l} a * x = b \\ \text{και} \\ x * a = b \end{array} \right.$$ έχουν μοναδική λύση

Απόδειξη: Έστω η εξίσωση $a * x = b$, όπου $a, b \in G$.

Τότε $a' * (a * x) = a' * b \Rightarrow (a' * a) * x = a' * b$

$\Rightarrow e * x = a' * b \Rightarrow x = a' * b$.

Αντίστροφα, αν $(a' * b) = (a * a') * b = e * b = b$

Ανάλογα, το στοιχείο $b * a'$ είναι μοναδική λύση της δεύτερης εξίσωσης

Πρόταση: Έστω $(G, *)$ ένα μονοειδές. Τότε το ζεύγος $(U(G), *)$ είναι ομάδα, όπου $U(G) := \{x \in G \mid \exists x' \in G : x * x' = e = x' * x\}$ το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων του μονοειδούς.

Απόδειξη: Η πράξη $*$, περιορισμένη στο υποσύνολο $U(G)$ είναι μια πράξη επί του $U(G)$. Πράγματι, έστω $x, y \in U(G) \Rightarrow \exists x', y' \in G$:

$x * x' = e = x' * x$
$y * y' = e = y' * y$

ΘΔΟ $x * y \in U(G)$. Θεωρούμε το στοιχείο $y' * x' \in G$. Τότε $(x * y) \cdot (y' * x')$

$$\overset{\text{Προσεταιριστική}}{=} x * ((y * y') * x')$$

$$= x * (e * x') = x * x' = e$$

Άρα $(x * y) \cdot (y' * x') = e$ (1)

Επίσης $(y' * x') * (x * y) = y' * ((x' * x) * y)$

$$= y' * (e * y) = y' * y = e.$$

Άρα $(y' * x') * (x * y) = e$ (2)

Από (1) και (2) $\Rightarrow$ $x * y \in U(G)$ και $(x * y)' = y' * x'$

(2) $U(G) \neq \emptyset$ διότι $e \in U(G)$: $e' * e = e = e * e' \Rightarrow e' = e$

(3) • Η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική στο $U(G)$ διότι είναι προσεταιριστική στο G και $U(G) \subseteq G$

• Προφανώς το ουδέτερο στοιχείο για την πράξη $*$ στο $U(G)$ είναι το e.

• Επειδή, $\forall x \in U(G)$ προφανώς $x' \in U(G)$ και άρα κάθε $x \in U(G)$ είναι αντιστρέψιμο στο $U(G)$

Άρα, $(U(G), *)$ είναι ομάδα.

Παραδείγματα: (1) $U(\mathbb{N}_0, +) = \{0\}$

(2) $U(\mathbb{Z}, +) = (\mathbb{Z}, +)$

(3) $U(\mathbb{R}, +) = (\mathbb{R}, +)$

(4) $U(\mathbb{C}, +) = (\mathbb{C}, +)$

Παράδειγμα: $U(\mathbb{N}, \cdot) = \{1\}$

$U(\mathbb{Z}, \cdot) = (\{1, -1\}, \cdot)$

$U(\mathbb{Q}, \cdot) = (\mathbb{Q}^*, \cdot)$

$U(\mathbb{R}, \cdot) = (\mathbb{R}^*, \cdot)$

$U(\mathbb{C}, \cdot) = (\mathbb{C}^*, \cdot)$

(3) Για κάθε $n \geq 1$, έστω το ζεύγος $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, όπου

$$[a]_n \cdot [b]_n = [a \cdot b]_n.$$

Τότε το ζεύγος $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ είναι μονοειδές με ουδέτερο στοιχείο την $[1]_n$. Τότε αποκτούμε την ομάδα

$U(\mathbb{Z}_n, \cdot) = U(\mathbb{Z}_n) :=$ αντιστρέψιμες κλάσεις ισοτιμίας mod n

$U(\mathbb{Z}_n) = \{[k]_n \in \mathbb{Z}_n \mid (k, n) = 1\}$

(4) Έστω το ζεύγος $(\mathbf{A}, *)$, όπου $\mathbf{A}$ = όλες οι αριθμητικές συναρτήσεις, $\mathbf{A} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid f$: συνάρτηση$\}$ και

$$(f * g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right) \quad \forall f, g \in A \text{ και } n \geq 1$$

Τότε το ζεύγος $(A, *)$ είναι μονοειδές με ουδέτερο στοιχείο την αριθμητική συνάρτηση $\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$

Τότε αποκτούμε την ομάδα $U(A, *) = U = \{f \in A \mid f$ ενελικτικά αντιστρέψιμη$\}$

Η ενελικτικά αντίστροφη μιας αριθμητικής συνάρτησης $f \in A$ είναι $f^{-1}(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d \mid n \\ d < n}} f^{-1}(d) \, f\left(\frac{n}{d}\right)$, αν $n > 1$

(5) $\mathcal{U} = (M_{n\times m}(\mathbb{K}), +) = (M_{n\times m}(\mathbb{K}), +)$

(6) $(M_n(\mathbb{K}), \cdot) = GL_n(\mathbb{K}) :=$ το σύνολο όλων των $n\times n$ πινάκων $:= \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \exists A' \in M_n(\mathbb{K}) : A\cdot A' = I_n = A'\cdot A\}$

όπου $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$GL_n(\mathbb{K})$: γενική γραμμική ομάδα με στοιχεία από το $\mathbb{K}$

- Αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ τότε $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow |A| \neq 0$
- Αν $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ τότε $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow |A| = \pm 1$

Γενικά $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow |A| \in K^*$ και $|A| \in \mathcal{U}(\mathbb{K})$

(7) $(\mathbb{C}^*, \cdot)$: ομάδα

$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ομάδα του κύκλου, είναι ομάδα με πράξη $\cdot$ (πολλαπλασιασμός μιγαδικών)

(1) $\forall z, w \in \mathcal{U}$ τότε $|z\cdot w| = |z|\cdot|w| = 1\cdot 1 = 1$
$\Rightarrow z\cdot w \in \mathcal{U}$

(2) Η πράξη $\cdot$ είναι προσεταιριστική

(3) $1 \in \mathcal{U}$ είναι ουδέτερο στοιχείο για την πράξη $\cdot$ στο $\mathcal{U}$

(4) $\forall z \in \mathcal{U} \Rightarrow z \neq 0 \Rightarrow \exists z^{-1} \in \mathbb{C}$ και $|z^{-1}| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = 1$
$\Rightarrow z^{-1} \in \mathcal{U}$

Scanned by CamScanner

Άρα το $(U, \cdot)$ αβελιανή ομάδα

(8) $\forall n \geq 1$ έστω $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} \subseteq U$

$\forall z, w \in U_n$ τότε $(z \cdot w)^n = z^n \cdot w^n = 1 \cdot 1 = 1$. Τότε

το ζεύγος $(U_n, \cdot)$ είναι μια αβελιανή ομάδα η οποία

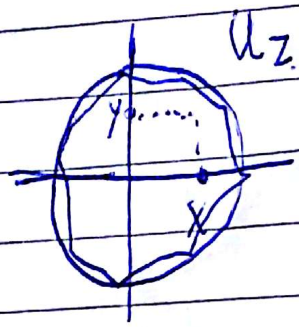
καλείται ως η ομάδα των n-οστών ριζών της μονάδας

- $n=1$ $\quad U_1 = \{1\}$
- $n=2$ $\quad U_2 = \{1, -1\}$
- $n=3$ $\quad U_3 = \left\{1, \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$

$\vdots$

Για τυχούσα τιμή του n $\quad U_n = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq k < n \right\}$

$$= \left\{ \cos\left(\frac{2k\pi i}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi i}{n}\right) \,\middle|\, 0 \leq k < n \right\}$$



U_z $\quad z = x + iy$

$|z| = 1$

Τα στοιχεία της U_n βρίσκονται σε ένα κανονικό πολύγωνο με n γωνίες το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο

(9) Έστω X: μη-κενό. Θεωρούμε το ζεύγος

$(Map(X), \circ)$, όπου $Map(X) = \{\varphi : X \to X \mid \varphi \text{ απεικόνιση}\}$

και ο πράξη της σύνθεσης. Τότε το ζεύγος

$(Map(X), \circ)$ μονοειδές με ουδέτερο στοιχείο την

I_dX. Τότε προκύπτει η ομάδα $U(Map(X), \circ) = (S(X)) \circ)$: ομάδα των μεταθέσεων επί του συνόλου X

Ιδιαίτερα, αν $X = \{1, 2, \dots, n\}$ τότε προκύπτει η ομάδα $(S(X), \circ) = (S_n, \circ)$, η n-οστή συμμετρική ομάδα $\forall n \geq 1$

Scanned by CamScanner

Άσκηση:

1	2
3	4

Να βρεθούν οι "κινήσεις" που μπορούμε να κάνουμε στο σκάκι ώστε να προκύψει μια ομάδα με 4 στοιχεία